Ad-Soyad :
Numara :

1	2	3	4	5	6	Toplam

19.06.2019

KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI

1. **a)** $z=(1-i)^{64}$ karmaşık sayısını $x+iy$ şeklinde yazınız.

b) $i^{(1+i)}$ karmaşık sayısının esas değerini bulunuz. ($(-\pi,\pi]$ aralığını kullanınız).

2. $|z-2|=1$ çemberinin $w=\dfrac{1}{z}$ dönüşümü altındaki görüntüsünü bulunuz ve çiziniz.

3. Logaritmanın esas dalının $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ kümesinde sürekli olduğunu gösteriniz.

4. $\left|e^{2z+i}+e^{iz^2}\right|\leq e^{2x}+e^{-2xy}$ olduğunu gösteriniz.

5. $f(z)=e^{y}(\cos x+i\sin x)$ fonksiyonunun analitik olup olmadığını araştırınız.

6. $T=\{z:\ 4\operatorname{Re}z-2\operatorname{Im}z=k\}$ doğrusunun $S=\{z:|z|=4\}$ çemberine teğet olması için k değeri ne olmalıdır?

Not : **Sadece 5 soru yanıtlayınız.** Sorular eşit puanlıdır. Süre 90 dakikadır.

Başarılar Dilerim...

Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI

19.06.2019

Kompleks Fonk. Teo. Giriş Dersi Bütünleme Sınavı Yanıt Anahtarı

1. a) $|1-i| = \sqrt{2}$, $\theta = \mathrm{Arg}(1-i) = \mathrm{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ ise

$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ olup

De Moivre formülünden

$$(1-i)^{64} = (\sqrt{2})^{64}\left(\cos\frac{64\pi}{4} - i\sin\frac{64\pi}{4}\right) = 2^{32}(\cos 16\pi - i\sin 16\pi)$$

$$= 2^{32}(1 - i.0) = 2^{32}$$

b) Defterinizde var.

2) $w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w}$ olup

$|z-2| = 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{w} - 2\right| = 1 \Rightarrow \frac{|1-2w|}{|w|} = 1$

$\Rightarrow |1-2w| = |w|$, $w = u+iv$ denirse

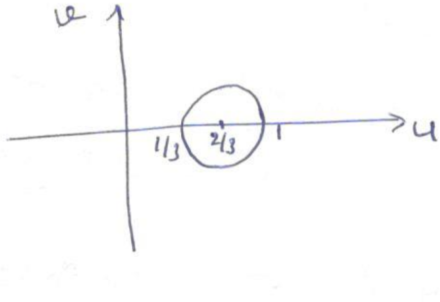
$|(1-2u) - 2vi| = |u+iv|$

$(1-2u)^2 + 4v^2 = u^2 + v^2$

$3u^2 + 3v^2 - 4u + 1 = 0$

$u^2 + v^2 - \frac{4}{3}u + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \left(u - \frac{2}{3}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}, 0\right)$ merkezli, $\frac{1}{3}$ yarıçaplı çember



3) Defterinizde var.

4) $\left| e^{2z+i} + e^{iz^2} \right| \leq \left| e^{2z+i} \right| + \left| e^{iz^2} \right| \quad \ldots (1)$

$$\left| e^{2z+i} \right| = \left| e^{2(x+iy)+i} \right| = \left| e^{2x+i(y+1)} \right| = \left| e^{2x} \right| \cdot \underbrace{\left| e^{i(y+1)} \right|}_{1} = e^{2x} \quad (2)$$

$$\left| e^{iz^2} \right| = \left| e^{i(x+iy)^2} \right| = \left| e^{i(x^2-y^2+2xyi)} \right|$$

$$= \underbrace{\left| e^{i(x^2-y^2)} \right|}_{1} \cdot \left| e^{-2xy} \right| = e^{-2xy} \quad \ldots (3)$$

(2) ve (3) ifadeleri (1) de yerine yazılırsa

$\left| e^{2z+i} + e^{iz^2} \right| \leq \left| e^{2z+i} \right| + \left| e^{iz^2} \right| = e^{2x} + e^{-2xy}$ bulunur.

5) $f(z) = e^y \cos x + i e^y \sin x = u + iv$

$u(x,y) = e^y \cos x \ , \quad v(x,y) = e^y \sin x$

$u_x = -e^y \sin x \quad u_y = e^y \cos x, \quad v_x = e^y \cos x, \quad v_y = e^y \sin x$

$u_x = v_y \Rightarrow \quad -e^y \sin x = e^y \sin x \Rightarrow 2e^y \sin x = 0$

$\Rightarrow e^y > 0$ olduğundan $\sin x = 0$ olmalı. $\Rightarrow \underline{x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}}$ (1)

$u_y = -v_x \Rightarrow \quad e^y \cos x = -e^y \cos x$

$2e^y \cos x = 0 \Rightarrow e^y > 0$ olduğundan $\cos x = 0$ olmalı.

$\Rightarrow \underline{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}}$ olmalı. (2)

(1) ve (2) den, Cauchy-Riemann denklemleri sağlamadığından

f, hiçbir yerde analitik değildir.

6) $|z|=4 \Rightarrow x^2+y^2=16$ (1)

$4\mathrm{Re}z - 2\mathrm{Im}z = k \Rightarrow 4x-2y=k \Rightarrow y = 2x - \frac{k}{2}$ (2)

(2), (1) de yerine yazılırsa

$x^2 + \left(2x - \frac{k}{2}\right)^2 = 16$

$x^2 + 4x^2 - 2xk + \frac{k^2}{4} = 16$

$5x^2 - 2xk + \frac{k^2}{4} - 16 = 0$

Doğrunun çembere teğet olması için, tek bir çözüm olmalı.

Yani $\Delta = 0$ olmalı.

$\Delta = 4k^2 - 4 \cdot 5\left(\frac{k^2}{4} - 16\right) = 0$

$4k^2 - 5k^2 + 16 \cdot 20 = 0$

$k^2 = 16 \cdot 20 \Rightarrow k = \mp 8\sqrt{5}$